

**Региональный этап всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2015/2016 учебном году**

Мурманская область

Шифр участника: М1015

Класс: 10

Количество баллов: 42

Результат участия: победитель

10.5. Выберем число x из
какого-то мн-ва A .

$$x + 0 \in A$$

$\Downarrow$

$$x \cdot 0 \in A \quad 0 \in A$$

Возьмём любое $k < 0$

$$-|k| + |k| = 0 \in A$$

$$-|k| \in A \Rightarrow \text{любое } k < 0 \in A$$

$$(-\infty; 0] \in A$$

Возьмём любое $k > 0$

$$-|k| + (-|k|) \in (-\infty; 0) \in A$$

$\Downarrow$

$$k \in A \Rightarrow \text{любое } k > 0 \in A$$

$$(0; +\infty) \in A$$

$$(-\infty; +\infty) \in A$$

5	6	7	8
7	0	7	0

Задача решена

Описанные действия и утверждения правильны
для всех действительных чисел

$\Downarrow$

A - мн-во действительных чисел $A = \mathbb{R}$

Ответ: мн-во всех действительных чисел

10.7. Будем соединять "горючие" пары и составлять
граф, где вершины - это девочки и мальчики,
а рёбра м/д ними - "горючие" пары.

1) Обозначим процедуру "схлопывания".

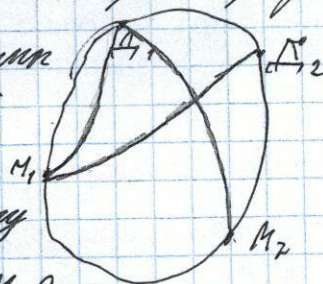
Заметим, что соседствующий мальчик и девочку мы можем убрать из круга, не нарушая остальных связей, т.к. ~~из~~ из каждого промежутка (дуги), в котором они состоят, мы возьмем 1 мальчика и 1 девочку, сохранив "хорошесть" остальных пар.

Поскольку мальчиков (M) и девочек (D) поровну, а в данной процедуре мы ~~удаляем~~ убираем из по одному элемент (м.с. одновременно - 1 из M и 1 из D), то, зная, что пока есть M и D в кругу, ~~есть~~ есть хотя бы 1 M рядом с 1 D , ~~мы~~ можно понять, что, повторяя процедуру "схлопывания", мы в конечном итоге удалим всех людей из круга.

Также стоит заметить, что пары, убираемые на любом этапе процедуры, являются "хорошими" парами, т.е. (см. выше) "хорошесть" в процессе не нарушается, а в момент удаления они являются "хорошими" парами. Также из этого следует, что, например, девочка может быть так удалена только с кем-нибудь из её "списка хороших пар" (списка мальчиков для хороших пар).

2) Покажем, что "хорошесть" пар "передается".

Рассмотрим введенный термин на примере на рис. справа. $\rightarrow$ (соседящие M и D - "хорошие" пары)



Рассмотрим, где-то в кругу есть 2 мальчика (M_1, M_2) и 2 девочки (D_1, D_2). Пусть M_1D_1, M_2D_2 и M_2D_1 - "хорошие" пары. Покажем, что M_2D_2 - тоже "хорошая" пара (т.е. что "хорошесть" от M_2 до D_2

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20__ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20__ г.

"передалась" через M, A_1)

М 1015

Известны "хорошие" пары:

M, A_1, M, A_1, M, A_2

Введем параметр a_{ij} для пары M, A_i - количество мальчиков и равное ему кол-во девочек между двумя членами пары. $a_{ij} < 0$, если отсчитывать идём от M мальчик часовой стрелки, и $a_{ij} > 0$, если по часовой.

Складывая этот параметр, идя по ребрам парам можно корректно (при выходе за границы кол-ва людей можно заменять сумму на её ост. от деления на $2n$ - кол-во людей), т.е. учитывается направление движения. Таким образом, мы, "идя" от M до A_2 и складывая параметр a получаем некоторое "расстояние" в людях по некоторому пути. К нему также прибавляется 1 и 1 - это "пройденные" M , и A_1 .

Используя пункт из п. 2), мы приходим к выводу, что, составив граф, в котором будут показаны все "хорошие" пары, мы получим неск. компонент связности - полный двудольный графов (каждый мальчик в нём соединён с каждой девочкой). Степень каждой вершины = кол-ву пар ("хороших"), в которых участвует человек, т.е. степень каждой A_i в графе = кол-ву M в ней и наоборот.

Осталось указать, что в компоненте связности мальчиков и девочек поровну.

Предположим, что их разное кол-во в
каждой колонке.

Валей проводить процедуру "сметыва-
ния" из п. 1. Как сказано в п. 1), удалён
из ряда человек может быть только с
его "хорошей" парой. Вна колонке
связности "хороших" пар быть не может,
т.е. все они уже отмечены.

Однако по п. 1) все люди выйдут из
ряда в процессе. Из данной колонки
будут удалены пары, пока не останутся только
мальчики или только девочки. Они, как
уже сказано, удалятся тоже и с кем-
нибудь из своих "хороших" пар среди
ост. людей. Однако такая не останется -
возникнет противоречие.

Итак, из условия и вышеописанной
становится понятно, что в данном
графе (построенном по случаю из условия)
есть колонка связности из 10 Д и
10 М. Каждый мальчик "связан" ровно
с 10 девочками, т.е.д.

$$\angle CBM = \angle ANK$$

$$\frac{BM}{AN} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{BL}{ND} = \frac{BM}{AN} = \frac{a}{b}$$

$$\angle LBM = \angle LBC - \angle CBM = \angle KND - \angle ANK = \angle AND$$

$$\angle LBM = \angle AND$$

$$\triangle LBM \sim \triangle DNA \text{ (по 2 сторонам и } \angle \text{ между ними)}$$

$$\angle BLM = \angle NDA = \alpha$$

$$\angle ALM = 180^\circ - \alpha$$

$$\angle ALM + \angle ADM = 180^\circ$$

↓

Вокруг ADML можно описать окружность, т.е.г.

НЕ ДОКАЗАНО!

10.4. Чёрных клеток в столбцах - по n.

Всего - 100n чёрных клеток (z)

и в строках - 100 чисел (разных) из списка (0, 1...100), т.е. все числа от 0 до 100 без одного (a)

S в чёрных клеток по строкам =

$$= 0 + 1 + 2 + \dots + 100 - a = \frac{100 \cdot 101}{2} - a = 5050 - a =$$

$$= 100n \quad 100n : 100 \Rightarrow 5050 - a : 100, a \in [0; 100]$$

$$a = 50 \quad S = 5000 \text{ (пол-во z)}$$

n = 50 (по 50 в столбцах) в строку - 0, 1...49, 51...100

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-62

№ _____ от "____" _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от "____" _____ 20 ____ г.

Будет считаться отдельно
горизонтальные пары
в строках и в столбцах
(вертикальные и горизонтальные)

M 1015

Сначала - горизонтальные пары
в каждой строке.

Макс. пар в строке = $2 \cdot \min(2, 5)$
(в каждой паре - 1 з и 1 б клетка,
1 клетка - максимум в 2 паре)

Кол-во з в строке 100 99 ... 49 51 ... 1 0

Макс. кол-во пар 0 2 98 98 2 0

Всего макс. горизонтальных пар: $2 \cdot (0 + 2 + \dots + 98) =$
 $= 2 \cdot 98 \cdot \frac{50}{2} = 98 \cdot 49 \cdot 2 = 4900$

* Соединим строки попарно макс, чтобы они
"дополняли" друг друга (напротив з клетки 1
строки - 5 клеток другой). Это строки 100 и 0,
99 и 1, 51 и 49 и т.д.

Кол-во вертикальных пар в каждой паре
этих строк - максимальное = 100.

Заметим, что для каждой строки есть только
1 пара, с которой возможно составить
100 вертикальных пар, т.к. кол-во з в I
строке = кол-во б во II строке, а
у всех строк разное кол-во з и б клеток.

Также для каждой строки есть пара, с
которой у неё ^{получатся б} верт. пар. (100 и 1, 98 и 1, 97 и 2 и
т.д.)

Остатком мы в пункте * соединим вертикально
лишнюю клетку с белой (каждую), у нас получится
2 ряда: 1) мы можем переставить клетки в
1 строке как угодно, соответственно переставляя их в другой строке

2) Условия на 50 клеток в столбце всегда выполняются, т.е. по вертикали каждой строке состоит из "столбцовых" в пункте * "доминиона" (или)

Расположим данные пары широт и долгот в широте):

Handwritten multiplication of 100 by 98 on lined paper:

$$\begin{array}{r}
 100 \\
 \times 98 \\
 \hline
 800 \\
 9000 \\
 \hline
 9800
 \end{array}$$

100
99
98
97
96
95
94
93
92
91
90
89
88
87
86
85
84
83
82
81
80
79
78
77
76
75
74
73
72
71
70
69
68
67
66
65
64
63
62
61
60
59
58
57
56
55
54
53
52
51
50
49
48
47
46
45
44
43
42
41
40
39
38
37
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0

 Как мы видим, как-то вертикаль-
 ных пар между строками 1 и 2,
 3 и 4, ... 99 и 100 - максимальное
 (по 100). Всего - 5000 таких пар.
 Также можно считать катеты
 местами в строках, получив максимальные
4900 горизонтальных пар.

Осталось проверить все пары и/или строчки 2 и 3, 4 и 5, ... 98 и 99, не нарушая условий из предыдущего пункта. Известно, что для каждой пары строк это число не превосходит 99 (всего 49 пар строк - не более 49 · 99 пар клеток).

Начинаю с нижней строки (49). По правилу из пункта * (содержит условие пункта), пара строк 51 и 49 образует тав. (написан):

57
48
51
49

57
48
51
49

Далее над строкой 51 надо расположить строку 48 так, чтобы её 48 ячеек располагались над 49 белыми клетками строки 51. Таким образом у нас будет выделено (нижние 2 к.л. не входят в ряд), а у этих двух строк 99 ячеек (у 48 и 51).

Аналогично, строку I, у которой 7 клеток меньше чем белых у строки II, полулегальной достраиваем от строки III (как 51 получена от 49), можно расположить. В над строкой I, выполняя условие X и получив 99 "зеренных" пар клеток. Итак, еще $49 \cdot 99 = 4851$ пар получено.

Из всего вышесказанного доказано, что

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82

№ _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.
на исх. № _____ от " _____ " _____ 20 ____ г.

максимальное количество
пар = $5000 + 4900 + 4851 =$
 $= 14751$, и его можно
написать.

Ответ: 14751

M1015

10.2. Пусть $НОД$ крайних $a - НОД_k$,
и $НОД$ средних - $НОД_c$

$НОД_k + НОД_c = 10000a + 2016$,
где $a \in \mathbb{N}_0$ - ~~какая-то~~ целая часть
от деления на 10000 суммы $НОД$

$$10000a : 16, 2016 : 16 \Rightarrow (НОД_k + НОД_c) : 16$$

Среди 10 ~~чисел~~ чисел подряд 1 можно $: 8 \Rightarrow 1$ из
 $НОД_k (НОД_{k+1}) : 8$ $(НОД_k + НОД_{k+1}) : 16$

Есть 2 варианта далее для $НОД_k : 8$ и $:$

1) $НОД_k : 16 \Rightarrow НОД_{k+1} : 16$. Тогда может
происходить, ^{только} если среди 10 чисел подряд 2
разных $: на 16$. Это невозможно, т. к.
между такими числами - 15 других, а
чисел всего 10.

2) $НОД_k : 16$ ($НОД_{k+1} : 16(8)$). Тогда $НОД_{k+2}$ тоже
 $: 16(8)$, т. е. $НОД_k : 8$, но $\nmid 16$.

Среди десяти чисел подряд, таким образом,
есть 2 числа, $\nmid 8$. Это $8k$ и $8(k+1)$.

См k - четное, $8k : 16$, и даже $8k+4 : 16$, т. е.

1 из них точно $: 16$, а значит, ~~для~~
 $НОД_k$ или $НОД_{k+1} : 16$, что вызывает
противоречие с условиями из 2)

Из всего вышесказанного следует, что описанная
ситуация невозможна

Ответ: не может.